(1) $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+2i)^2}$

(10) A. Kotar

[redacted]

a) dla $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ $\left|\frac{z}{2i}\right| < 1$ oraz $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$

szukamy tych stałych

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+2i)^2} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z+2i)} + \frac{C}{(z+2i)^2} = \frac{A(z+2i)^2 + B(z+2i)(z-1) + C(z-1)}{(z-1)(z+2i)^2} \Rightarrow$$

licznik: $A(z^2+4zi-4) + B(z^2+z(2i-1)-2i) + Cz - C$

$$\left.\begin{array}{l} z^0: 0 = -4A - 2Bi - C \\ z^1: 0 = 4iA + B(2i-1) + C \\ z^2: 1 = A + B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = A(4i-4) + B(2i-1-2i) \\ 0 = 4A(i-1) - B \\ 0 = A + B - 1 \\ 0 = -3A + 4Ai - 1 \\ 1 = A(4i-3) \Rightarrow A = \frac{1}{4i-3} = -\frac{4i+3}{25} \end{array}$$

z $1 = A + B$

$$\Rightarrow B = \frac{28+4i}{25} \Rightarrow 0 = -4\left(-\frac{4i+3}{25}\right) - 2i\left(\frac{28+4i}{25}\right) - C$$

$$0 = \frac{16i+12-56i+8}{25} - C = \frac{-40i+20}{25} - C$$

$$C = \frac{4-8i}{5}$$

w dalszej części będę się posługiwać tymi literkami

Wracając do szeregu Laurenta (czyli $\sum_{-\infty}^{+\infty} z^k a_k$)

$$\frac{A}{z-1} = A \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{A}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k = A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}$$

$$\frac{B}{(z+2i)} = \frac{B}{2i} \cdot \frac{1}{\frac{z}{2i}+1} = \frac{Bi}{-2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2i}\right)^k = \frac{-Bi}{2} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^k z^k$$

szereg jest bezwzględnie zbieżny, więc różniczkujemy wyraz po wyrazie

$$\frac{C}{(z+2i)^2} = -C\left(\frac{1}{z+2i}\right)' = -C \cdot \frac{i}{-2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2i}\right)^k\right]' = \frac{Ci}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-k}{2i}\left(-\frac{z}{2i}\right)^k =$$

a) 5pt

$$= \frac{Ci}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ki}{2} \left(-\frac{1}{2i}\right)^k \cdot z^k$$

Zatem $\Rightarrow f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} z^k a_k$ $\quad a_k = \begin{cases} A & \text{dla } k \le -1 \\ \frac{-Bi}{2} & \text{dla } k = 0 \\ \frac{ki}{2}\left(-\frac{1}{2i}\right)^k + \left(\frac{i}{2}\right)^k & \text{dla } k \ge 1 \end{cases}$

b) $\quad \underset{z\in\mathbb{C}}{\text{dla}}\ |z|>2 \quad \left|\frac{1}{z}\right|<1$ oraz $\left|\frac{2i}{z}\right|<1$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{(z+2i)}+\frac{C}{(z+2i)^2}$$

$$\frac{A}{z-1}=\frac{A}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)=\frac{A}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k=A\cdot\sum_{k=1}^{\infty}z^{-k}$$

$$\frac{B}{z+2i}=\frac{B}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2i}{z}}=\frac{B}{z}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2i}{z}\right)^k=b\sum_{k=1}^{\infty}(-2i)^{k-1}\cdot z^{-k}$$

$$\frac{C}{(z+2i)^2}=\left(\frac{-C}{z+2i}\right)'=\left(-C\sum_{k=1}^{\infty}(-2i)^{k-1}\cdot z^{-k}\right)'=$$

$$=-C\sum_{k=1}^{\infty}(-2i)^{k-1}(-k)\,z^{-(k+1)}=C\sum_{k=1}^{\infty}(-2i)^{k-1}\cdot k\,z^{-(k+1)}=C\sum_{k=0}^{\infty}(-2i)^{k-2}\cdot(k-1)\,z^{-k}$$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}z^k\cdot a_k \quad \text{gdzie } a_k=\begin{cases}0 & \text{dla } k\geq 0\\ A+B(-2i)^{-k+1}+C(-2i)^{-k+2}(1-k) & \text{dla } k\leq -1\\ C(-2i)^{-2}(-1) & \text{dla } k=0\end{cases}$$

b) 5

[redacted]

10 A. Kotan

(2) $f(z) = \frac{z^3}{z^2-1} \sin\left(\frac{2}{z-3}\right) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)} \sin\left(\frac{2}{z-3}\right)$

- $z_0 = -1$ to biegun (rzędu 1), bo $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ale
$\lim_{z \to z_0} f(z)(z+1) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^3}{z-1} \sin\left(\frac{2}{z-3}\right) = \frac{-1}{-2} \sin\left(-\frac{1}{2}\right)$ – istnieje, skończona i $\neq 0$

- $z_0 = 1$ to też biegun rzędu 1 bo $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, ale
$\lim_{z \to z_0} f(z)(z-1) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^3}{z+1} \sin\left(\frac{2}{z-3}\right) = \frac{1}{2} \sin(-1)$ istnieje, skończona oraz $\neq 0$

- $z_0 = 3$ to osobliwość istotna
część $\frac{z^3}{z^2-1}$ jest holomorficzna blisko 3 więc możemy się skupić na sinusie. Skoro sinus ma rozwinięcie Taylora z x^n dla nieskończenie wielu dużych n, to $\sin\left(\frac{2}{z-3}\right)$ będzie się rozwijało w szereg Laurenta wokół 3 z nieskończenie wieloma niezerowymi współczynnikami w części głównej, a to oznacza że osobliwość jest istotna.

- w ∞: badamy $f\left(\frac{1}{z}\right)$ w 0

$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3}{\left(\frac{1}{z}+1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)} \sin\left(\frac{2}{\frac{1}{z}-3}\right) = \frac{\frac{1}{z}}{(z+1)(1-z)} \sin\left(\frac{2z}{1-3z}\right) = \frac{1}{z(z+1)(1-z)} \sin\left(\frac{2z}{1-3z}\right)$

[redacted]

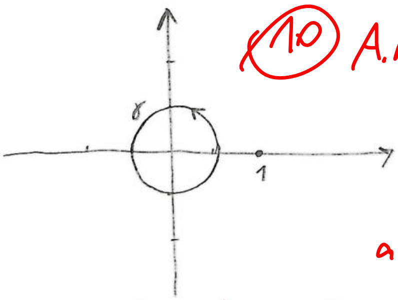
$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z(z+1)(1-z)} \sin\left(\frac{2z}{1-3z}\right) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin\left(\frac{2z}{1-3z}\right)}{\frac{2z}{1-3z}} \cdot \frac{2z}{(1-3z)z(z+1)(1-z)} =$

$= \lim_{z \to 0} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{2z}{1-3z}\right)}{\frac{2z}{1-3z}}}_{1} \frac{2}{(1-3z)(z+1)(1-z)} = \frac{2}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 2$

Czyli jest to osobliwość usuwalna

10 A. Kot[illegible]

③ $\int_\gamma \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z+i\right)}{(z-1)^4}\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$



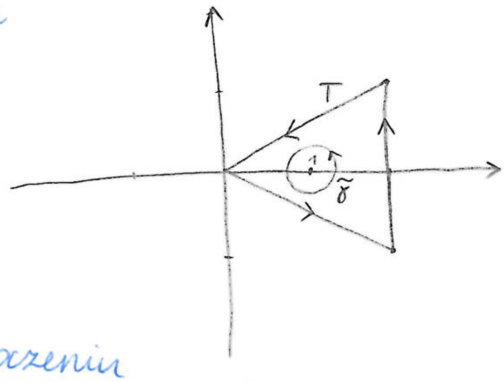
a) $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

a) 5

f jest holomorficzna wewnątrz oraz na otwartym otoczeniu γ, która jest krzywą zamkniętą, więc całka będzie równa 0 (czyli $\mathrm{Re}=0$ oraz $\mathrm{Im}=0$)

b) $\gamma = \partial T$, gdzie T to trójkąt o wierzchołkach w punktach $(2,-1), (2,1), (0,0)$

f jest holomorficzna w $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, zatem także całka będzie równa całce po $\tilde{\gamma}$ - małym okręgu otaczającym punkt 1, ponieważ w tym obszarze $\tilde{\gamma}$ oraz T są homotopijne



~~Ale~~ $\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}} g(z)\cdot\frac{1}{(z-1)^4}\,dz$

Gdzie $g(z) = \sin\left(\frac{\pi}{4}z+i\right)$ holomorficzna w otoczeniu

Możemy więc użyć wzoru Cauchy'ego dla $z_0 = 1$. Wtedy ~~Ind~~ $\mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}}(z_0) = 1$

więc $\int_{\tilde{\gamma}} g(z)\frac{1}{(z-1)^4} = \frac{2\pi i}{3!}\, g^{(3)}(z_0)$

$g(z) = \sin\left(\frac{\pi}{4}z+1\right)$

$g'(z) = \cos\left(\frac{\pi}{4}z+i\right)\cdot\frac{\pi}{4}$

$g''(z) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}z+i\right)\cdot\frac{\pi^2}{16}$

$g^{(3)}(z) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}z+i\right)\cdot\frac{\pi^3}{64}$

$g^{(3)}(z_0) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\right)\frac{\pi^3}{64} = -\frac{\pi^3}{64}\cdot\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}+i\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+i\right)}}{2} = -\frac{\pi^3}{128}\left(e^{-1+\frac{\pi}{4}i}+e^{1-\frac{\pi}{4}i}\right)$

$e^{-1+\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{e}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{e}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$e^{1-\frac{\pi}{4}i} = e\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i} = e\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = e\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{6}\left(-\frac{\pi^3}{128}\right)g^{(3)}(1) = -i\cdot\frac{\pi^4}{3\cdot128}\left(\frac{1}{e}\frac{\sqrt{2}}{2}+e\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{1}{e}\frac{\sqrt{2}}{2}-e\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$

$= -\frac{\pi^4}{3\cdot128}\left(e\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{e}\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{1}{e}\frac{\sqrt{2}}{2}+e\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

b) 5

$\mathrm{Re}[\ldots] = -\frac{\pi^4}{3\cdot128}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

$\mathrm{Im}[\ldots] = \frac{-\pi^4}{3\cdot128}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{e}+e\right)$

[redacted]

(10) A. Katr...

(6. Ładne rozwiązanie!)

4) załóżmy że istnieje takie F.

Skoro jest holomorficzne w $D(0,1)$, to $\forall\, 0<r<1$

$$\int_{S(0,r)} F(z)\,dz = 0$$

a skoro F ciągła na $\overline{D(0,1)}$, to zbiegając z r do 1

dostajemy $\int_{S(0,1)} F(z)\,dz = 0$

z drugiej strony: $\int_{S(0,1)} F(z)\,dz = \int_{S(0,1)} z+\bar{z}\,dz = \int_{S(0,1)} z+\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$

bo $|z|^2 = z\bar{z} \rightarrow \bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$ a dla $|z|=1$: $\bar{z} = \frac{1}{z}$

a $\int_{S(0,1)} z+\frac{1}{z}\,dz = \int_{S(0,1)} z\,dz + \int_{S(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = 0 + 2\pi i$

(co wiemy z ćwiczeń)

Czyli sprzeczność i takie F nie istnieje

Funkcje analityczne. Zadanie 5 z kolokwium dla chorych.

Zadanie 5. Załóżmy, że funkcja $f \in H(\mathbb{C})$ jest wymierna. Jakie warunki musi spełniać funkcja f, żeby funkcja
$$g(z) = \exp(f(z))$$
była meromorficzna?

Rozwiązanie. Jeśli f jest wielomianem, teza zachodzi. Pokazemy, że meromorficzność f implikuje że f jest wielomianem.

Załóżmy przeciwnie, że f nie jest wielomianem. Bez straty ogólności możemy założyć, że f ma biegun w $z = 0$ (niezmienniczość własności wymierności oraz meromorficzności ze względu na wewnętrzne translacje). Wówczas możemy napisać

$$f(z) = P(\frac{1}{z}) + h(z),$$

gdzie P jest wielomianem takim, że $P(0) = 0$, oraz h jest holomorficzna na pewnym otoczeniu zera. Zatem

$$g(z) := \exp(f(z)) = \exp(P(\frac{1}{z}))\exp(h(z)).$$

Funkcja $\exp(h(z))$ jest holomorficzna na pewnym otoczeniu zera. Jest ona niezerowa, oraz $1/\exp(h(z))$ jest także holomorficzna na pewnym otoczeniu zera więc żeby określić rodzaj osobliwości funkcji g w zerze, wystarczy rozpatrzeć funkcję

$$a(z) := \exp(P(1/z)).$$

Zauważmy, że $P(1/z)$ ma biegun w $z = 0$, zatem $\lim_{z\to\infty} P(1/z) = \infty$, a stąd $P(1/z)$ przekształca (dostatecznie małe) dyski $D(0, r)$ w pewne otoczenie nieskończoności

$$U(r) \supseteq \{w : |w| \geqslant R(r) > 0\}.$$

Funkacja $\exp(w)$ ma osobliwość istotną w nieskończoności, zatem

$$\exp\left(\{w : |w| \geqslant R(r) > 0\}\right)$$

jest zbiorem gęstym w $\mathbb{C}$. W takim razie obraz

$$a((D(r))) = \exp \circ P \circ (1/z)\,(D(r))$$

jest zbiorem gęstym w $\mathbb{C}$. Funkcja a nie może zatem mieć osobliwoścu usuwalnej ani zera w zerze, gryż w takiej sytuacji obraz dysku byłby albo ograniczony z góry w przypadku osobliwości usuwalnej, albo ograniczony z dołu przez liczbę dodatnią (dla dostatecznie małych r) w przypadku bieguna, co nie jest spełnione. $\square$

⑩ A. Kot...

Tu przydałyby się wyjaśnienia.

⓪ $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

$$\frac{\left|\frac{az+b}{cz+d} - \frac{ap+b}{cp+d}\right|}{\left|\frac{az+b}{cz+d} - \frac{aq+b}{cq+d}\right|} = \alpha$$

$$\frac{(az+b)(cp+d) - (ap+b)(cz+d)}{(cz+d)(cp+d)} =$$

$$= \frac{\cancel{aczp} + adz + bcp + \cancel{bd} - \cancel{aczp} - adp - bcz - \cancel{bd}}{(cz+d)(cp+d)}$$

$$= \frac{ad(z-p) - bc(z-p)}{(cz+d)(cp+d)}$$

$$\frac{(az+b)(cq+d) - (cz+d)(aq+b)}{(cz+d)(cq+d)} = \frac{ad(z-q) - bc(z-q)}{(cz+d)(cq+d)}$$

tu mi nic nie psuje bo $ad-bc \neq 0$ dla homografii

czyli
$$\frac{|h(z)-h(p)|}{|h(z)-h(q)|} = \frac{\left|\frac{ad(z-p)-bc(z-p)}{(cz+d)(cp+d)}\right|}{\left|\frac{ad(z-q)-bc(z-q)}{(cz+d)(cq+d)}\right|} = \frac{|z-p|}{|z-q|} \cdot \frac{\left|\frac{ad-bc}{(cz+d)(cp+d)}\right|}{\left|\frac{ad-bc}{(cz+d)(cq+d)}\right|} =$$

$$= \lambda \cdot \left|\frac{ad-bc}{(cz+d)(cp+d)} \cdot \frac{(cz+d)(cq+d)}{ad-bc}\right| = \lambda \cdot \left|\frac{cq+d}{cp+d}\right| = \lambda \cdot \text{stała} = \alpha \cdot \lambda$$

i to jest OK bo jeśli $\alpha = 0$ to $cq = -d \to q = -\frac{d}{c}$

czyli $h(q) = \infty$, a to ma zachodzić dla p, q w $\mathbb{C}$, a nie $\overline{\mathbb{C}}$

Analogicznie gdy $p = -\frac{d}{c}$